ریاضی عمومی ۱ رشته ی ریاضی

"بر اساس کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه ی تحلیلی لوئیس لیتهلد"

حد و پیوستگی

غلامحسین غلامی

دانشگاه ارومیه، دانشکده ی علوم، گروه ریاضی

نیمسال دوم ۸۹–۱۳۸۸

تعریف

فرض کنید f تابعی باشد که در تمام نقاط یک بازه مانند I که شامل عدد a است، بجز احتمالا در خود a، تعریف شود. حد $f(x)$ وقتی x به سمت a میل می کند برابر با L است و می نویسیم:

$$\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = L$$

اگر به ازای هر $\epsilon > 0$، هر قدر کوچک، عدد مثبتی چون δ وجود داشته باشد که

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

- توجه داشته باشید که در تعریف فوق نیازی نیست که تابع در خود a تعریف شده باشد.
- بنابرین هدف پیدا کردن يك همسايگي محذوف از نقطه $x = a$ مي باشد كه در اين همسايگي براي هر $\epsilon > 0$ دلخواه، $|f(x) - L| < \epsilon$.

مثال

با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

$$\lim_{x\to 1}(3x-4) = -1$$

اثبات:

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \ni\ 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |3x-4+1| < \epsilon$$

$$|3x-4+1| < \epsilon \Rightarrow |3x-3| = 3|x-1| < \epsilon \Rightarrow |x-1| < \frac{\epsilon}{3}$$

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \ni\ 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |x-1| < \frac{\epsilon}{3}$$

بنابرین کافی است که $\delta \leq \epsilon/3$ باشد تا استلزام منطقی فوق همواره درست باشد.

مثال

با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

$$\lim_{x\to -\frac{1}{5}} [x] = -1$$

اثبات:
با توجه به نمودار تابع در اطراف $x = -\frac{1}{5}$ داریم:

$$\delta < \frac{1}{5} \Rightarrow \left|x + \frac{1}{5}\right| < \delta < \frac{1}{5} \Rightarrow \left|x + \frac{1}{5}\right| < \frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{2}{5} < x < 0$$
$$\Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow |[x] + 1| = 0 < \epsilon.$$

بنابرین:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists 0 < \delta < \frac{1}{5} \ \ni \ \left|x + \frac{1}{5}\right| < \delta \Rightarrow |[x] + 1| < \epsilon$$

مثال

با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

$$\lim_{x\to 7} \frac{8}{x-3} = 2$$

اثبات:
چون $8/(x-3)$ به ازای هر مقدار x بجز 3 تعریف شده است، بازه ی باز لازم در تعریف حد می تواند هر فاصله ای که شامل 7 بوده ولی 3 را در بر ندارد باشد.

$$0 < |x-7| < \delta \Rightarrow \left|\frac{8}{x-3} - 2\right| = |x-7|.\frac{2}{|x-3|} < \epsilon$$

$$\Rightarrow |x-7| < \frac{|x-3|\epsilon}{2} \Rightarrow$$

$$0 < |x-7| < \delta \Rightarrow |x-7| < \frac{|x-3|\epsilon}{2}$$

اثبات (ادامه)

برای اینک استلزام منطقی فوق همواره برقرار باشد باید داشته باشیم:

$$\delta < \frac{|x-3|\epsilon}{2}$$

اما در این عبارت δ وابسته به x است.
توجه داشته باشید که استلزام زیر همواره درست است.

$$|x-1| < A < \frac{|x-3|\epsilon}{2} \Longrightarrow |x-1| < \frac{|x-3|\epsilon}{2}.$$

اثبات (ادامه)

بنابرین برای از بین بردن این وابستگی، بازه ی مورد نیاز در تعریف حد را چنان اختیار می کنیم که به ازای مقادیر x در این بازه، کران پائینی A برای $\frac{|x-3|\epsilon}{2}$ بدست آید.
فرض کنید $I=(6,8)$ باشد که مرکزش 7 و شعاعش 1 است. آنگاه

$$\forall x \in (6,8) \;\; \frac{|x-3|\epsilon}{2} > \frac{(6-3)\epsilon}{2} = \frac{3}{2}\epsilon.$$

یعنی:

$$\begin{aligned} |x-7| < 1 \qquad & \Longrightarrow \frac{3}{2}\epsilon < \frac{|x-3|\epsilon}{2}, \\ |x-7| < \frac{3}{2}\epsilon \qquad & \Longrightarrow |x-7| < \frac{|x-3|\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

اثبات (ادامه)

حال اگر $\delta \leq \min\{1, \frac{3}{2}\epsilon\}$ باشد

$$|x-7| < \delta \Rightarrow |x-7| < \frac{3}{2}\epsilon < \frac{|x-3|\epsilon}{2} \Rightarrow |x-7| < \frac{|x-3|\epsilon}{2}.$$

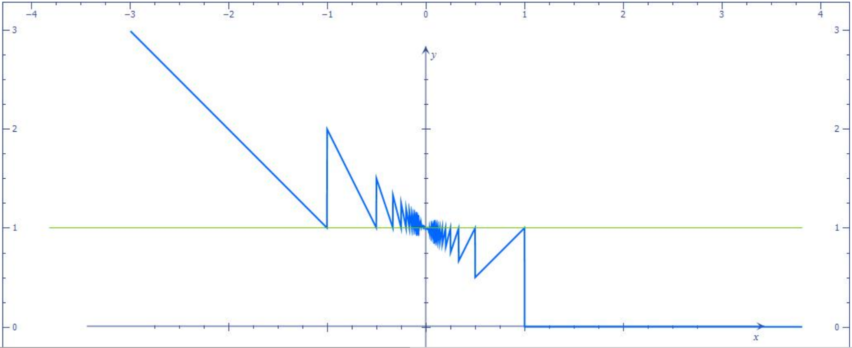
یعنی

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists 0 < \delta \leq \min\{1, \frac{3}{2}\epsilon\} \ \ni 0 < |x-7| < \delta \Rightarrow \left|\frac{8}{x-3} - 2\right| < \epsilon.$$

تمرین

با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$$



قضیه ی یکتایی حدود

قضیه

اگر $\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = L_1$ ، و $\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = L_2$ باشد، آنگاه $L_1 = L_2$.

اثبات: برهان خلف. فرض می کنیم $L_1 \neq L_2$.

$$\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = L_1 \Rightarrow (\forall\epsilon > 0\, \exists\delta_1 > 0 \ni 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \epsilon)$$
$$\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = L_2 \Rightarrow (\forall\epsilon > 0\, \exists\delta_2 > 0 \ni 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \epsilon)$$
$$|L_1 - L_2| = |(L_1 - f(x)) + (f(x) - L_2)| \leq |(L_1 - f(x))| + |(f(x) - L_2)|$$
$$\delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\} \Rightarrow |f(x) - L_1| < \epsilon, |f(x) - L_2| < \epsilon \Rightarrow |L_1 - L_2| < 2\epsilon$$

از آنجائی که ϵ دلخواه است، عبارت فوق بدین معنی است که $L_1 = L_2$.

قضایای مربوط به حد توابع

- $\lim_{x\to a}(mx+b) = ma+b \qquad \forall m, b \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x\to a} c = c \qquad \forall c \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x\to a} x = a$
- اگر $\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1, \ldots, \lim_{x\to a} f_2(x) = L_2, \lim_{x\to a} f_n(x) = L_n$ آنگاه

$$\lim_{x\to a}[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)] = L_1 \pm L_2 \pm \ldots \pm L_n$$

- اگر $\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1, \ldots, \lim_{x\to a} f_2(x) = L_2, \lim_{x\to a} f_n(x) = L_n$ آنگاه

$$\lim_{x\to a}[f_1(x).f_2(x)\ldots f_n(x)] = L_1 L_2 \ldots L_n$$

قضایای مربوط به حد توابع (ادامه)

- اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L, \lim_{x\to a} g(x) = M \neq 0$ آنگاه
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}.$$
- اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L > 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ ، آنگاه: $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$
- $\forall a \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$.
- اگر $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$

برای اثبات قضایای فوق صفحات ۱۱۷–۱۲۹ کتاب را ببینید.

حد راست

تعریف

فرض کنید تابع f برای هر عدد در بازه ی بازی چون (a, c) تعریف شده باشد. حد $f(x)$ وقتی x از سمت راست به a میل می کند، برابر با L^+ است و نوشته می شود

$$\lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = L^+$$

هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ ، هر قدر کوچک، یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد بطوریکه

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L^+| < \epsilon.$$

حد چپ

تعریف

فرض کنید تابع f برای هر عدد در بازه ی بازی چون (d, a) تعریف شده باشد. حد $f(x)$ وقتی x از سمت چپ به a میل می کند، برابر با L^- است و نوشته می شود

$$\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = L^-$$

هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ ، هر قدر کوچک، یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد بطوریکه

$$0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L^-| < \epsilon.$$

مثال

اگر $f(x) = \begin{cases} x+1 & x>1 \\ 3-x & x<1 \end{cases}$ باشد، آنگاه ثابت کنید $\lim_{x\to 1^{\pm}} f(x) = 2$.

اثبات:
بررسی حد راست :

$$0 < x-1 < \delta_1 \Rightarrow |x+1-2| < \epsilon$$

بنابرین کافی است که $\delta_1 \leq \epsilon$ باشد.
بررسی حد چپ :

$$0 < 1-x < \delta_2 \Rightarrow |3-x-2| < \epsilon$$

بنابرین کافی است که $\delta_2 \leq \epsilon$ باشد.

اثبات (ادامه)

حال اگر $\delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \ni\ 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < \epsilon$$

همواره برقرار است.

تمرین

بااستفاده از تعریف حد ثابت کنید:

$$1)\ \lim_{x\longrightarrow -2} x^2 = 4,\quad 2)\ \lim_{x\longrightarrow 3} \frac{x^2-2}{x-2} = 7,\qquad 3)\ \lim_{x\longrightarrow 2} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{2}$$

یک شرط لازم و کافی برای وجود حد

قضیه

$\lim_{x\longrightarrow a} f(x)$ وجود دارد وبرابر L است اگر و تنها اگر $\lim_{x\longrightarrow a^-} f(x)$ و $\lim_{x\longrightarrow a^+} f(x)$ هر دو موجود و برابر L باشند.

اثبات:
با توجه به

$$0 < |x-a| < \delta \Leftrightarrow \begin{cases} x-a < \delta & x > a \\ a-x < \delta & x < a \end{cases}$$

اثبات واضح است.

تعریف

فرض کنید f تابعی باشد که در تمام نقاط یک بازه مانند I که شامل عدد a است، بجز احتمالا در خود a، تعریف شود. وقتی x به سمت a میل می کند، $f(x)$ بطور بیکران افزایش می یابد و می نویسیم:

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = +\infty$$

اگر به ازای هر $N > 0$، عدد مثبتی چون δ وجود داشته باشد که

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > N$$

تعریف

فرض کنید f تابعی باشد که در تمام نقاط یک بازه مانند I که شامل عدد a است، بجز احتمالا در خود a، تعریف شود. وقتی x به سمت a میل می کند، $f(x)$ بطور بیکران کاهش می یابد و می نویسیم:

$$\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = -\infty$$

اگر به ازای هر $N < 0$، عدد مثبتی چون δ وجود داشته باشد که

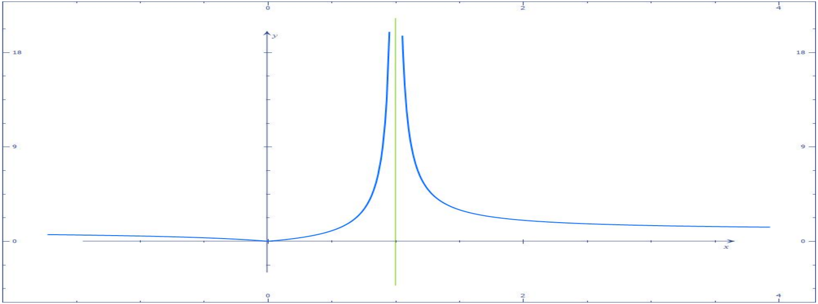
$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < N$$

- توجه داشته باشید که $\pm\infty$ یک عدد حقیقی نیست. بنایرین، وقتی می نویسیم$\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x) = +\infty$ معنی آن مثل $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x) = L < +\infty$ نیست. $\pm\infty$ فقط رفتار تابع را وقتی x به سمت a میل می کند نشان می دهد.

مثال

با استفاده از تعریف حد ثابت کنید.

$$\lim_{x \to -3} \left| \frac{5-x}{x+3} \right| = +\infty$$



اثبات:

$$\forall N>0\,\exists\delta>0 \ni 0<|x+3|<\delta\Rightarrow\left|\frac{5-x}{x+3}\right|>N$$

$$\left|\frac{5-x}{x+3}\right|>N\Rightarrow\left|\frac{x+3}{5-x}\right|<\frac{1}{N}\Rightarrow|x+3|<A<\frac{|x-5|}{N}\Rightarrow$$
$$A=\min\frac{|x-5|}{N}.$$

اگر $\delta=1$ باشد، آنگاه:

$$-4<x<-2\Rightarrow-9<x-5<-7\Rightarrow 7<|x-5|<9$$

بنابرین $A=\frac{7}{N}$ ، برای برقراری استلزام کافی است که $\delta\leq\min\{1,A\}$ اختیار شود.

قضایای مربوط به حدود بی نهایت

قضیه

اگر $r \in \mathbb{Z}^+$ باشد، آنگاه

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty$
- $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty & r \text{ فرد} \\ +\infty & r \text{ زوج} \end{cases}$

مثال

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^4} = +\infty, \ \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^4} = +\infty \ \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty, \ \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

قضایای مربوط به ...

قضیه

فرض کنید $a \in \mathbb{R}$ *دلخواه بوده ،* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *و* $\lim_{x\to a} g(x) = c \neq 0$

(i) *اگر* $c > 0$ *و* $f(x) \to 0^{\pm}$ *، آنگاه:* $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \pm\infty$

(ii) *اگر* $c < 0$ *و* $f(x) \to 0^{\pm}$ *، آنگاه:* $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \mp\infty$

اثبات (ii)، قسمت دوم:

$$c < 0,\ f(x) \to 0^{-} \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

باید نشان دهیم:

$$\forall N > 0 \, \exists \delta > 0 \ \ni 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \frac{g(x)}{f(x)} > N$$

اثبات:

$$\lim_{x \longrightarrow a} g(x) = c < 0 \overset{\epsilon = -\frac{c}{2}}{\Longrightarrow}$$

$$\exists \delta_1 > 0 \ \ni 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - c| < -\frac{c}{2} \Rightarrow \frac{3c}{2} < g(x) < \frac{c}{2}.$$

$$f(x) \rightarrow 0^- \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \, \exists \delta_2 > 0 \ \ni 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow f(x) > -\epsilon$$

$$0 < |x-a| < \delta_1, 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow \frac{g(x)}{f(x)} > -\frac{c/2}{\epsilon}$$

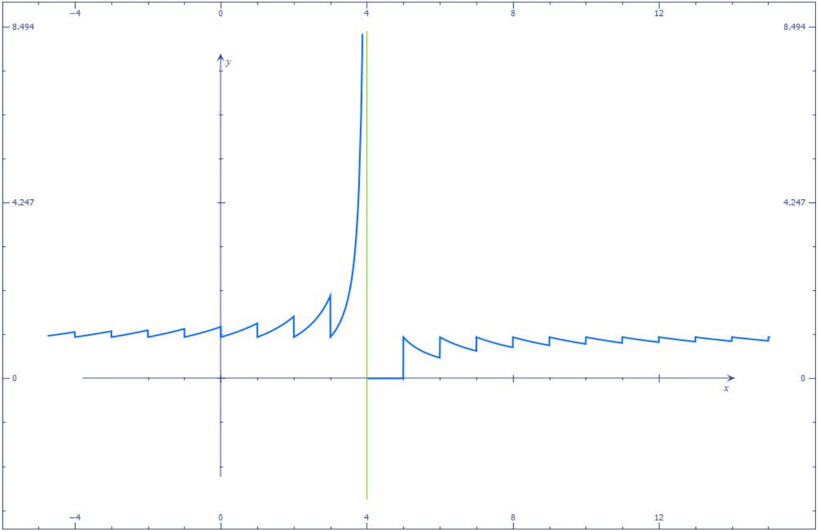
$$0 < |x-a| < \min\{\delta_1, \delta_2\} \Rightarrow \frac{g(x)}{f(x)} > -\frac{c/2}{\epsilon} \geq N \Rightarrow \epsilon \leq \frac{-c}{2N}$$

مثال

مطلوب است $\lim_{x\to 4^-} \frac{[x]-4}{x-4}$

$$\lim_{x\to 4^-}[x]=3 \Rightarrow \lim_{x\to 4^-}([x]-4)=-1,\quad \lim_{x\to 4^-}(x-4)=0^-$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 4^-}\frac{[x]-4}{x-4}=+\infty$$


−4
0
4
8
12
8.494
4.247
0
y
x

قضیه

- اگر $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty,\ \lim_{x\to a} g(x) = c$ باشد، آنگاه:

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \pm\infty.$$

- اگر $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty,\ \lim_{x\to a} g(x) = c$ باشد، آنگاه:

$$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = \begin{cases} \pm\infty & c > 0 \\ \mp\infty & c < 0 \end{cases}$$

- اگر به جای $x \to a$ داشته باشیم $x \to a^+$ یا $x \to a^-$ موارد فوق همچنان برقرار خواهند بود.

مجانبهای قائم منحنی

مجانبهای یک تابع رفتار تابع را در یک همسایگی نشان می دهند و ابزاری کمکی برای رسم نمودار یک تابع می باشند.

تعریف

خط $x = a$ را یک مجانب قائم نمودار تابع f می گویند هرگاه حداقل یکی از عبارات زیر برقرار باشد:

- $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$
- $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$

تعریف

فرض کنید f تابعی باشد که در تمام نقاط یک بازه مانند $(a, +\infty)$ ، تعریف شده است. می گوییم حد تابع $f(x)$ وقتی x بطور بیکران افزایش می یابد برابر با عدد L است و می نویسیم:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = L$$

اگر به ازای هر $\epsilon > 0$، هر قدر کوچک ، یک عدد $N > 0$ وجود داشته باشد که

$$x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

تعریف

فرض کنید f تابعی باشد که در تمام نقاط یک بازه مانند $(-\infty, a)$ ، تعریف شده است. می گوییم حد تابع $f(x)$ وقتی x بطور بیکران کاهش می یابد برابر با عدد L است و می نویسیم:

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = L$$

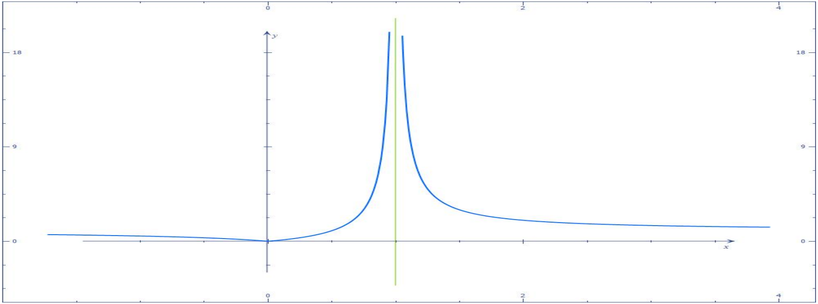
اگر به ازای هر $\epsilon > 0$، هر قدر کوچک ، یک عدد $N < 0$ وجود داشته باشد که

$$x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

مثال

با استفاده از تعریف حد ثابت کنید.

$$\lim_{x\to-\infty}\left|\frac{x}{x-1}\right|=1$$



اثبات:

$$\forall\epsilon > 0\, \exists N < 0 \ni x < N \Rightarrow \left|\left|\frac{x}{x-1}\right| - 1\right| < \epsilon$$

$$\left|\frac{x}{x-1} - 1\right| = \left|\frac{1}{x-1}\right| < \epsilon \Rightarrow |x-1| > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow$$

$$x < 1 - \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow N < 1 - \frac{1}{\epsilon}$$

یعنی:

$$\forall\epsilon > 0\, \exists N < 1 - \frac{1}{\epsilon} \ni x < N \Rightarrow \left|\frac{x}{x-1} - 1\right| < \epsilon$$

و اثبات کامل است.

قضیه

اگر $r \in \mathbb{Z}^+$ باشد، آنگاه

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

مثال

مطلوب است محاسبه ی حد زیر

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{3+4/x}{\sqrt{2x^2-5}/\sqrt{x^2}} \\
&= \frac{\lim_{x \to +\infty}(3+4/x)}{\lim_{x \to +\infty} \sqrt{2-5/x^2}} \\
&= \frac{\lim_{x \to +\infty}(3+4/x)}{\sqrt{\lim_{x \to +\infty}(2-5/x^2)}} = \frac{3}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

مثال

مطلوب است محاسبه ی حد $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}$

توجه داشته باشید از آنجائی که مقادیر منفی x را در نظر داریم، $\sqrt{x^2}=-x$ خواهد بود.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{3+4/x}{\sqrt{2x^2-5}/(-\sqrt{x^2})}\\
&= \frac{\lim_{x\to-\infty}(3+4/x)}{\lim_{x\to-\infty}(-\sqrt{2-5/x^2})}\\
&= \frac{\lim_{x\to-\infty}(3+4/x)}{-\sqrt{\lim_{x\to-\infty}(2-5/x^2)}}=-\frac{3}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

حدود بینهایت در بینهایت

فرض کنید تابع f در فاصله های لازم هر یک از موارد زیر تعریف شده باشند.

تعریف

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad (\forall N > 0\, \exists M > 0 \ni x > M \Rightarrow f(x) > N)$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad (\forall N < 0\, \exists M > 0 \ni x > M \Rightarrow f(x) < N)$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad (\forall N > 0\, \exists M < 0 \ni x < M \Rightarrow f(x) > N)$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad (\forall N < 0\, \exists M < 0 \ni x < M \Rightarrow f(x) < N)$$

مجانبهای افقی منحنی

تعریف

خط $y = b$ را یک مجانب افقی نمودار تابع f می گویند هرگاه حداقل یکی از عبارات زیر برقرار باشد:

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \;\&\; \exists N > 0 \ni x > N \Rightarrow f(x) \neq b$.
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \;\&\; \exists N < 0 \ni x < N \Rightarrow f(x) \neq b$.

تعریف

تابع f را در عدد a پیوسته گوییم اگر و تنها اگر سه شرط زیر برقرار باشند.

(i) $f(a)$ وجود داشته باشد.

(ii) $lim_{x\longrightarrow a} f(x)$ وجود داشته باشد.

(iii) $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x) = f(a)$.

اگر یک یا چند شرط از شرایط فوق برقرار نباشد، گوییم تابع f در a ناپیوسته است.
اگر $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x)$ وجود نداشته باشد، ناپیوستگی را ناپیوستگی رفع نشدنی یا اساسی می گوییم.
اگر $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x)$ وجود داشته باشد ولی $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x) \neq f(a)$ باشد، ناپیوستگی را ناپیوستگی رفع شدنی می گوییم.

قضیه

خاصیت پیوسته بودن توابع، در صورت تعریف پذیری، نسبت به چهار عمل اصلی بسته است.

قضیه

تابع f در a پیوسته است اگر f در یک بازه ی شامل a تعریف شده باشد، و

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \ni |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

قضیه

اگر تابع g در a پیوسته و تابع f در $g(a)$ پیوسته باشد آنگاه تابع مرکب fog در a پیوسته است.
به بیان دیگر:
اگر داشته باشیم $\lim\limits_{x\longrightarrow a} g(x) = b$ ، و اگر تابع f در b پیوسته باشد، آنگاه:

$$\lim_{x\longrightarrow a}(f\circ g)(x) = f(b) \quad \text{یا} \quad \lim_{x\longrightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x\longrightarrow a} g(x))$$

اثبات

$$\lim_{y\to b} f(y) = f(b) \Rightarrow (\forall\epsilon_1 > 0\, \exists\delta_1 > 0 \ni |y-b| < \delta_1 \Rightarrow |f(y)-f(b)| < \epsilon_1)$$

$$\lim_{x\to a} g(x) = b \Rightarrow (\forall\delta_1 > 0\, \exists\delta_2 > 0 \ni 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)-b| < \delta_1)$$

$$0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)-b| < \delta_1 \Rightarrow |f(g(x))-b| < \epsilon_1 \Rightarrow$$

$$\forall\epsilon_1 > 0\, \exists\delta_2 > 0 \ni 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(g(x))-b| < \epsilon_1$$

بنابرین

$$\lim_{x\to a}(f\circ g)(x) = f(b) \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x))$$

مثال

ثابت کنید که اگر تابع f در t پیوسته باشد آنگاه :

$$\lim_{x\longrightarrow 0} f(t-x) = f(t)$$

اثبات:

$$\lim_{x\longrightarrow t} f(x) = f(t), \quad g(x) = t - x, \quad \lim_{x\longrightarrow 0} g(x) = t$$

بنا به قضیه ی قبل ،

$$\lim_{x\longrightarrow 0} f(t-x) = \lim_{x\longrightarrow 0} f(g(x)) = f(\lim_{x\longrightarrow 0} g(x)) = f(t)$$

تعریف

تابع f در بازه ی باز I پیوسته است اگر و تنها اگر تابع به ازای هر عدد در I پیوسته باشد.

تعریف

تابع f را در عدد a پیوسته از راست (+)(یا چپ(−)) گوییم اگر و تنها اگر سه شرط زیر برقرار باشند.

(i) $f(a)$ وجود داشته باشد.

(ii) $lim_{x\to a^\pm} f(x)$ وجود داشته باشد.

(iii) $\lim\limits_{x\to a^\pm} f(x) = f(a)$.

تعریف

تابع f را در نظر بگیرید و فرض کنید $[a, b] \subset D_f$. تابع f روی $[a, b]$ پیوسته است اگر و تنها اگر روی بازه ی باز (a, b) پیوسته بوده و همچنین از طرف راست در a و از طرف چپ روی b پیوسته باشد.

مثال

پیوستگی تابع $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$ را در $[-2, 2]$ بررسی کنید.

تابع h روی بازه ی باز $(-2, 2)$ پیوسته است.

$$\lim_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0 = h(-2), \qquad \lim_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0 = h(2),$$

پس بنا به تعریف تابع در کل فاصله پیوسته است.

قضیه ی مقدار میانی

قضیه

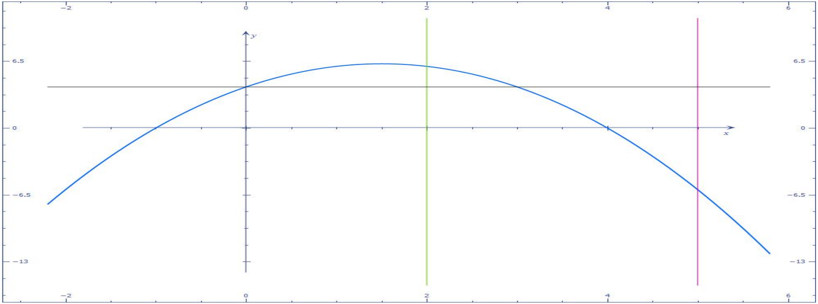
فرض کنید تابع f روی بازه ی بسته $[a, b]$ پیوسته باشد و $f(a) \neq f(b)$ به ازای هر k بین $f(a)$ و $f(b)$ خواهیم داشت: $\exists c \in [a, b] \ni f(c) = k$

- اگر $f(a).f(b) < 0$ باشد، معادله ی $f(x) = 0$ در بازه ی $[a, b]$ حداقل دارای یک ریشه خواهد بود.

مثال

درستی قضیه ی مقدار میانی را به ازای $k = 4$ در مورد تابع زیر بررسی کنید.

$$f(x) = 4 + 3x - x^2 \qquad 2 \leq x \leq 5$$



$$f(2) = 6 \geq k = 4 \geq f(5) = -6.$$

$$f(c) = k \Rightarrow 4 + 3c - c^2 = 4 \Rightarrow c = 0,\ 3 \Rightarrow 0 \notin [2,5],\ 3 \in [2,5]$$

مثال

فرض کنید f روي $[0,1]$ پیوسته باشد و براي هر x در این بازه $0 \leq f(x) \leq 1$ باشد، در این صورت ثابت کنید:

$$\exists c \in [0,1] \ni f(c) = c$$

اثبات:
اگر $f(0) = 0,\ f(1) = 1$ باشد که حکم ثابت است.
حال فرض کنیم $f(0) > 0,\ f(1) < 1$ باشد.

$$h(x) = f(x) - x \Rightarrow h(0) = f(0) > 0,\ h(1) = f(1) - 1 < 0$$

$$\Rightarrow h(0).h(1) < 0 \overset{\text{I.V.P}}{\Longrightarrow} \exists c \in [0,1] \ni h(c) = 0 \Rightarrow f(c) = c$$

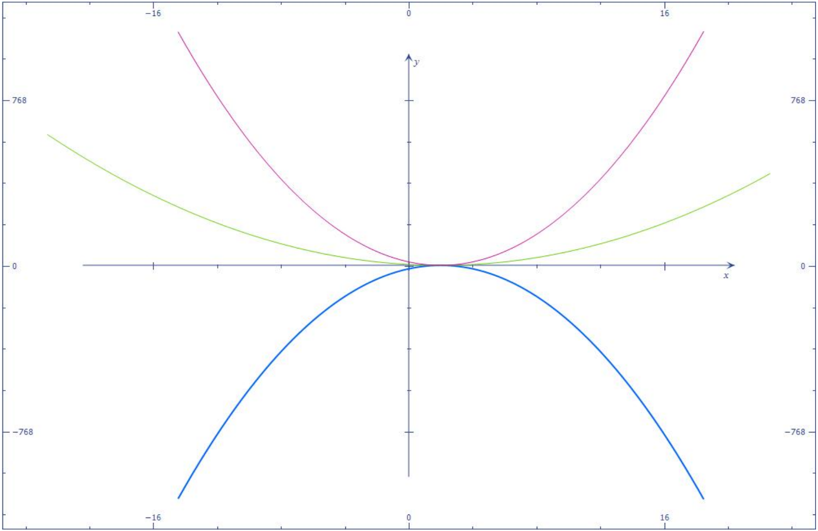
قضیه ی افشردگی

قضیه

فرض کنید که توابع f، g ،و h روی بازه ی باز I ی شامل a ، احتمالاً بجز در خود a ، تعریف شده باشند وبه ازای هر x در I که $x \neq a$ ، داشته باشیم

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a} h(x) = L \Rightarrow \lim_{x \longrightarrow a} g(x) = L$$


−16
0
16
y
768
768
0
0
x
−768
−768
−16
0
16

اثبات قضیه افشردگی

اثبات:

$$\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = \lim_{x\longrightarrow a} h(x) = L \Rightarrow$$
$$\forall\epsilon > 0\, \exists\delta_1 > 0 \ \ni 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow L-\epsilon < f(x) < L+\epsilon$$
$$\forall\epsilon > 0\, \exists\delta_2 > 0 \ \ni 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow L-\epsilon < h(x) < L+\epsilon$$
$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \Rightarrow$$
$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow L-\epsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < L+\epsilon \Rightarrow$$
$$L-\epsilon < g(x) < L+\epsilon$$
$$\forall\epsilon > 0\, \exists\delta > 0 \ \ni 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x)-L| < \epsilon$$
$$\Rightarrow \lim_{x\longrightarrow a} g(x) = L.$$

مثال

تصور کنید که به ازای هر x ، $|f(x)| \leq M \in \mathbb{R}$ باشد. همچنین فرض کنید که $\lim\limits_{x\longrightarrow a} |g(x)| = 0$. با استفاده از قضیه ی افشردگی ثابت کنید:

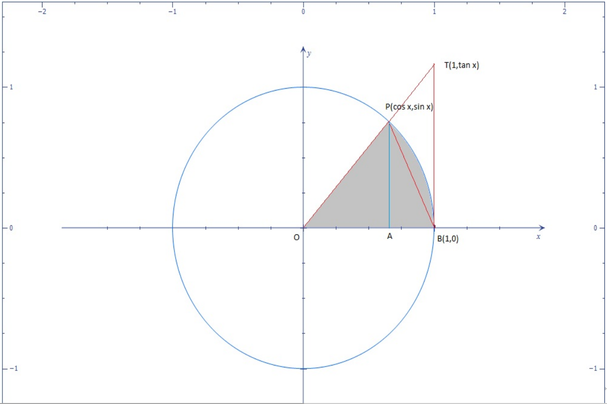
$$\lim_{x\longrightarrow a} f(x)g(x) = 0$$

اثبات:

$$|f(x)| \leq M \Rightarrow |f(x)g(x)| \leq M|g(x) \Rightarrow$$
$$\lim_{x\longrightarrow a} |f(x)g(x)| \leq M \lim_{x\longrightarrow a} |g(x)| = 0 \Rightarrow \quad \lim_{x\longrightarrow a} |f(x)g(x)| = 0 \Rightarrow$$
$$\lim_{x\longrightarrow a} f(x)g(x) = 0$$

قضیه

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$



فرض کنید $0 < x < \pi/2$. می دانیم که مساحت قطاعی از دایره به شعاع r و زاویه ی مرکزی x بر حسب رادیان، برابر $r^2x/2$ است. بنابرین مساحت قطاع BOP برابر $S = x/2$ خواهد بود.

$$S(\overset{\triangle}{BOP}) = K_1 = \frac{1}{2}AP.OB = \frac{1}{2}\sin x$$

$$S(\overset{\triangle}{BOT}) = K_2 = \frac{1}{2}BT.OB = \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$K_1 < S < K_2 \Rightarrow \frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\sin(x) < x, \ \frac{1-\cos x}{2} = \sin^2\frac{1}{2}x \Rightarrow \sin^2\frac{1}{2}x < \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1-\cos x}{2} < \frac{x^2}{4} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2}x^2 < \cos x$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2}x^2 < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

اگر $-\pi/2 < x < 0$، آنگاه $0 < -x < \pi/2$ و با توجه به عبارت بالا

$$1 - \frac{1}{2}(-x)^2 < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1 \qquad -\frac{\pi}{2} < x < 0$$

$$1 - \frac{1}{2}x^2 < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad -\frac{\pi}{2} < x < 0 \Rightarrow$$

$$1 - \frac{1}{2}x^2 < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad x \neq 0,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}(1 - \frac{1}{2}x^2) < \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} < 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

قضایای زیر نتایج مستقیم قضیه ی قبل هستند.

قضیه

تابع سینوسی در 0 پیوسته است.

قضیه

تابع کسینوسی در 0 پیوسته است.

قضیه

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

قضایای دیگری درباره ی حد

قضیه

اگر $\lim\limits_{x\longrightarrow c} f(x)$ موجود و مثبت باشد، آنگاه یک بازهی باز شامل c وجود دارد که برای هر $x \neq c$ واقع در آن بازه، داریم $f(x) > 0$.

قضیه

اگر $\lim\limits_{x\longrightarrow c} f(x)$ موجود و منفی باشد، آنگاه یک بازهی باز شامل c وجود دارد که برای هر $x \neq c$ واقع در آن بازه، داریم $f(x) < 0$.

قضایای دیگری درباره ی حد ...

قضیه

فرض کنید f تابعی باشد که در تمام نقاط یک بازه مانند I که شامل عدد c است، بجز احتمالاً در خود c، تعریف شود. همچنین فرض کنید عدد M ی وجود دارد که برای آن یک عدد $0 < \delta$ یافت می شود که وقتی $0 < |x-c| < \delta$، $f(x) \leq M$. در اینصورت ، اگر $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجود و برابر با L باشد، $L \leq M$.

قضایای دیگری درباره ی حد ...

قضیه

فرض کنید f تابعی باشد که در تمام نقاط یک بازه مانند I که شامل عدد c است، بجز احتمالا در خود c، تعریف شود. همچنین فرض کنید عدد M ی وجود دارد که برای آن یک عدد $\delta > 0$ یافت می شود که وقتی $0 < |x-c| < \delta$، $f(x) \geq M$. در اینصورت ، اگر $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجود و برابر با L باشد، $L \geq M$.

اثبات قضایای فوق را می توانید در کتاب درسی ببینید.